Volumenerhaltende Interpolation aus polygonbezogenen Daten in einem unregelmäßigen Dreiecksnetz (TIN)

Wolf-Dieter RASE

Dieser Beitrag wurde nach Begutachtung durch das Programmkomitee als „reviewed paper" angenommen.

Zusammenfassung

Zur Konstruktion einer stetigen Oberfläche aus flächenbezogenen Daten ist die Anwendung der pyknophylaktischen Interpolation notwendig, um das Volumen über den Bezugseinheiten konstant zu halten. In manchen Anwendungsfällen führt die pyknophylaktischen Interpolation mit einem regelmäßigen Gitter mit Höhenwerten zu Problemen, etwa bei sehr unterschiedlichen Flächengrößen. Eine Lösung dieser Probleme ist die Verwendung von unregelmäßigen Dreiecksnetzen (TIN) als Datenmodell für die Oberfläche. In die Polygone des Grenznetzwerks werden zusätzliche Punkte eingefügt, die für die Interpolation einer glatten Oberfläche notwendig sind. Die Verdichtung erfolgt mit Verfahren für die Erzeugung von Netzen mit vorgegebenen Qualitätseigenschaften (*quality meshes*). Zur Anpassung an die geometrischen Eigenschaften von unregelmäßigen Dreiecksnetzen sind kleinere Modifikationen des ursprünglichen Algorithmus für die pyknophylaktische Interpolation erforderlich.

1 Flächenbezogene Indikatoren und ihre Visualisierung

Die überwiegende Anzahl von Indikatoren zur Messung regionaler Disparitäten wird aus aggregierten Daten berechnet. Die demographischen, sozialen und wirtschaftlichen Eigenschaften von Personen, Haushalten, Wohnungen oder Firmen werden für flächenhafte Bezugseinheiten auf allen Ebenen der Erhebungs- bzw. Verwaltungshierarchie aufsummiert. Die räumliche Verteilung der Daten und Indikatoren wird überwiegend mit Choroplethenkarten visualisiert. Choroplethenkarten haben den Vorteil, dass sie einfach herzustellen sind und ohne besondere Vorkenntnisse und Erfahrungen interpretiert werden können. Auf der anderen Seite gehen durch die Reduktion auf wenige Klassen wichtige Informationen verloren. Die absolute Größe des Indikators für die einzelnen Bezugsflächen ist nicht direkt erkennbar, auch aufgrund der zweidimensionalen Darstellung. Der Vergleich der Höhe wird erst möglich durch die Einbeziehung von Darstellungsformen, die den Eindruck der dritten Dimension vermitteln, etwa die simulierte Beleuchtung, perspektivische Darstellungen oder 3D-Modelle (RASE 2003).

Soziale, ökonomische und insbesondere naturräumliche Vorgänge auf der Erdoberfläche machen nicht an den Grenzen administrativer Einheiten halt. Die abrupten Übergänge, die zwischen zwei benachbarten Bezugseinheiten auf einer Choroplethenkarte auftreten können, werden in erster Linie durch die Art der Datenerhebung und die Darstellung verursacht und geben nicht das tatsächliche Bild der Verteilung wieder. Die Bevölkerung eines Kreises ist zum Beispiel nicht homogen über die Fläche verteilt, und an den Grenzen treten keine so starken Sprünge auf, wie es die Choroplethenkarte suggerieren könnte. Bei den für die großräumige Analyse adäquaten Maßstäben können diskrete Verteilungen als kontinuierliche Phänomene wahrgenommen werden. Sie sind deshalb als Oberfläche modellierbar und darstellbar. Stetige Oberflächen haben darüber hinaus den Vorteil, dass bei der Erfassung runde Formen gegenüber kantigen Formen präferiert werden. Die dreidimensionale Darstellung mit simulierter Beleuchtung ist bei kontinuierlichen Oberflächen besser als bei dreidimensionalen Choroplethenkarten (aus den Bezugspolygonen extrudierte Prismen).

In einer stetigen Oberfläche sind die Grenzen der Bezugseinheiten auch nicht mehr direkt erkennbar, was in manchen Verhandlungssituationen in der großräumigen Planung, insbesondere auch über die nationalen Grenzen hinaus, ein Vorteil sein kann. Das Fehlen wahrnehmbarer Sprünge an den Grenzen kann auch der graphische Ausdruck der Unsicherheit und Fehlerwahrscheinlichkeit in den dargestellten Daten sein, etwa bei Modellrechnungen und Prognosen.

Die Eigenschaften der Ausgangsdaten sollen in der interpolierten Oberfläche erhalten bleiben. Für die Interpolation aus unregelmäßig verteilten Punkten gilt normalerweise, dass die Oberfläche durch die Datenpunkte gehen soll. Ausnahmen sind Ausgleichsrechnungen bei Messfehlern oder die Berechnung von räumlichen Trends, etwa mit bivariaten Polynomen (RASE 1998). Bei flächenhaften Bezugseinheiten gibt es keine Bezugspunkte, durch die die Oberfläche gehen soll. Als zu erhaltende Eigenschaft wird in diesem Fall das Volumen über der Bezugseinheit betrachtet. Das Interpolationsverfahren muss die Erhaltung des Volumens sichern, mit einer akzeptablen Fehlermarge. Die Höhe der Oberfläche innerhalb eines Polygons kann variieren, der Durchschnitt aller z-Werte in einem Polygon muss aber konstant bleiben.

2 Interpolation in einem regelmäßigen Gitter

Zur Berechnung einer stetigen Oberfläche aus flächenbezogenen Daten hat Tobler ein Verfahren entwickelt, das er *pyknophylaktische Interpolation* nannte (TOBLER 1979). Diese volumenerhaltende Interpolation – so die deutsche Bedeutung der griechischen Namensbestandteile – ist wie viele andere Optimierungsrechnungen ein iteratives Verfahren.

2.1 Initialisierung

Über das Untersuchungsgebiet wird ein regelmäßiges Gitter aus Rechtecken oder Dreiecken mit wählbarer Maschenweite gelegt und jeder Gitterpunkt einem Bezugspolygon zugeordnet. Als Höhenwert des Gitterpunktes wird die Höhe des zugeordneten Polygons eingesetzt. Bei absoluten Werten, etwa die Gesamtzahl der Einwohner, wird die Höhe durch Division durch die Polygonfläche berechnet. Es entsteht eine virtuelle dreidimensionale Choroplethenkarte aus rechteckigen oder sechseckigen Säulen (letztere in einem Dreiecksnetz).

2.2 Glättung der Oberfläche

Die Oberfläche wird geglättet, indem für jeden Punkt des Gitters der Durchschnitt aus den Nachbarn im Gitter berechnet wird. Das ursprüngliche Verfahren von TOBLER nutzt zwei Möglichkeiten für die Berechnung des Durchschnitts aus den z-Werten:

- unmittelbare Nachbarn (Abb. 1a)
- Nachbarn der Nachbarn mit Gewichtung nach der Entfernung (Abb. 1b)

TOBLER (1979) hat die Verwandtschaft des ersten Verfahrens mit der Laplace-Gleichung, die des zweiten Verfahrens mit der biharmonischen Gleichung hergeleitet.

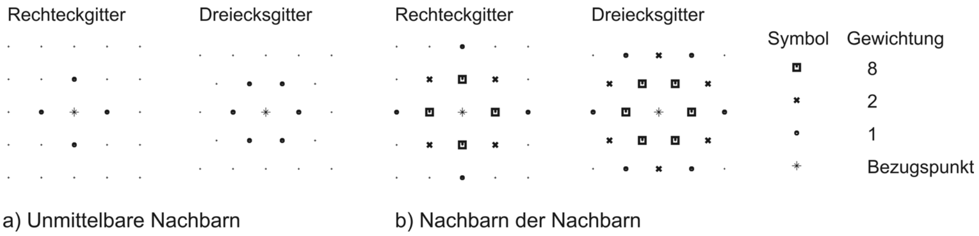

Abb. 1: Durchschnittsberechnung für die Punkte im regelmäßigen Rechteck- und Dreiecksgitter

2.3 Volumenerhaltung durch Korrektur der z-Werte

Nach der Glättung hat sich das Volumen über der Bezugsfläche verändert. Die Höhe der Gitterpunkte muss so korrigiert werden, dass das Volumen über jedem Polygon wieder dem vorgegebenen Wert (Soll) entspricht. Der Differenzbetrag zwischen Ist und Soll jedes Polygons wird anteilig auf die Punkte im Polygon verteilt, so dass sich das Ist-Volumen während der Iteration allmählich dem Soll-Volumen annähert. Die Erfahrung, auch mit anderen iterativen Verfahren, hat gezeigt, dass es zweckmäßig ist, nur ein Viertel des Korrekturbetrages für die Korrektur der z-Werte zu verwenden, damit die Korrekturwerte in einem Iterationsschritt nicht zu groß werden und eine nicht zu schnelle Annäherung an den optimalen Wert erfolgt. Damit werden in den meisten Fällen Oszillationen um den Sollwert im Laufe der Iteration vermieden.

2.4 Kriterien für den Abbruch der Iteration

Die Glättung und die Korrektur der z-Werte werden so lange fortgesetzt, bis die vorgegebene Anzahl der Iterationsschritte erreicht ist. Das kann bei einem dichten Gitter sehr viel Rechenzeit in Anspruch nehmen. Deshalb ist es sinnvoll, die Iteration beim Erreichen von vorgegebenen Schwellenwerten für bestimmte Messwerte abzubrechen. Ein Kriterium ist zum Beispiel die „Rauheit" der Oberfläche, statistisch als die Varianz im Glättungsschritt definiert. Ein anderes Kriterium ist das Verhältnis zwischen dem Istwert und dem Sollwert der Volumina oder der Höhenwerte, im Idealfall der Wert 1.0 oder die relative Abweichung von 0 Prozent. Denkbar ist auch die Möglichkeit, die Veränderung eines Kriteriums gegenüber dem vorigen Iterationsschritt heranzuziehen. Wenn sich der Wert nicht mehr wesentlich verändert oder sogar wieder ansteigt, ist es nicht sinnvoll, mit der Iteration fortzufahren.

Der Betrag der Rauheit und die Abweichung von Ist und Soll sind auch abhängig von der Maschenweite des Gitters. Generell ist die Rauheit umso geringer, je engmaschiger das Gitter ist. Die Erhaltung des Volumens wird aber nicht in jedem Fall besser, wenn der Betrag der Rauheit sinkt. Bei ungünstigen Konstellationen, etwa bei der Einwohnerzahl in den Raumordnungsregionen der Bundesrepublik Deutschland, kann es vorkommen, dass die Summe der Abweichungen vom Volumen-Soll sehr gering erscheint. Bei einzelnen Regionen treten jedoch größere Abweichungen zwischen Ist und Soll auf. Gründe ist das sehr starke Gefälle in der Einwohnerdichte zwischen Agglomeration und Umland, etwa zwischen Berlin und den umliegenden Regionen, und der zusätzlichen Einschränkung, dass die Einwohnerzahl nicht kleiner als Null sein darf. In diesem Fall hat der Anwender die Wahl, ob für manche Polygone große Differenzen zwischen Soll- und Ist-Volumen zurückbleiben oder einige Höhenwerte in manchen Polygon negativ sind (der Durchschnitt im Polygon bleibt positiv).

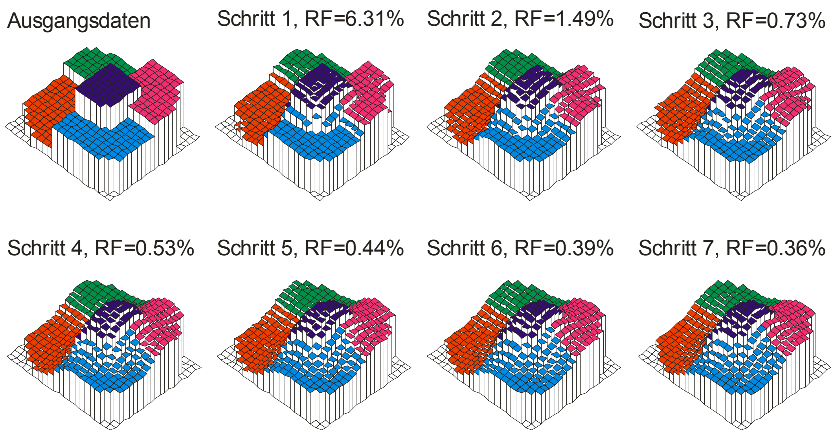

Abb. 2: Iterationsschritte bei einem Testdatensatz. RF: Maßzahl für die Rauheit

2.5 Probleme bei der Verwendung eines regelmäßigen Gitters

Das regelmäßige Gitter mit Höhenwerten als Datenmodell für die Oberfläche hat spezifische Probleme, die beachtet und gelöst werden müssen. Bei der Umlegung der Polygone auf das Gitter wird das Polygon nur so gut abgebildet, wie es die Maschenweite zulässt. Die Summe der Rechtecke oder Sechsecke für die Rasterpunkt-Bereiche ist nicht genau identisch mit der Fläche des Polygons. Diese Ungenauigkeiten der Rasterung machen sich insbesondere bemerkbar, wenn die Polygone der Bezugseinheiten sehr unterschiedliche Größen haben, wie etwa auf der mittleren Verwaltungsebene (Kreise) in Deutschland. In Abhängigkeit von der Maschenweite des Gitters sind in den großen Kreisen sehr viele Gitterpunkte vorhanden, in den erheblich kleineren kreisfreien Städten sehr wenige Gitterpunkte. Auch bei scheinbar ausreichenden Zellengrößen fallen manche Städte buchstäblich durch das Gitter, manchmal auch aufgrund ihrer geometrischen Form.

Die nächstliegende Lösung ist die Verkleinerung der Maschenweite, so dass auch kleine und ungünstig geformte Polygone eine Mindestanzahl von Gitterpunkten enthalten. Das erhöht aber den Aufwand für die Interpolation und vor allem für die graphische Weiterverarbeitung. Ein zu dichtes Gitter wirkt sich auch auf die Form der Oberfläche aus. Bei großen Polygonen werden die Teile, die weit von der Polygongrenze entfernt sind, im Glättungsschritt langsamer verändert als die Gebiete nahe der Grenze, ohne dass sich das in den Maßzahlen für die Rauheit oder die Volumenerhaltung auffällig bemerkbar macht. Es können „Tafelberge“ mit relativ flachen Oberseiten anstatt von gerundeten Hügeln und Tälern entstehen. Der Schluss liegt nahe, als Oberflächen-Modell ein adaptives Netz mit veränderlicher Maschenweite anstatt eines regelmäßigen Gitters zu nutzen.

3 Interpolation in einem unregelmäßigen Dreiecksnetz (TIN)

Ein anderes Datenmodell für die Kodierung einer Oberfläche neben dem regelmäßigen Gitter ist das unregelmäßige Dreiecksnetz, auch als TIN (*triangular irregular network*) bekannt (PEUCKER et al. 1978). Die unregelmäßig verteilten Datenpunkte mit den Höhenwerten bilden die Knoten des Netzwerks. Die Knoten werden so durch Strecken verbunden, dass ein Netz von Dreiecken unterschiedlicher Größe und Form entsteht. Das TIN-Modell ist *adaptiv*, die Größe der Dreiecke kann an die lokale Reliefenergie der Oberfläche angepasst werden. In flachen Regionen (wenig Reliefenergie) können die Dreiecke größer, in Teilen der Oberfläche mit hoher Reliefenergie (große und häufige Wechsel der Höhe) kleiner und zahlreicher sein.

3.1 Konstruktion des Dreiecksnetzes

Die Konstruktion des Dreiecksnetzes nach dem *Delaunay-Kriterium* wird allgemein als die beste Lösung angesehen. Ein Dreiecksnetz entspricht einer Delaunay-Triangulation, wenn der Umkreis jedes Dreiecks keinen Eckpunkt eines anderen Dreiecks enthält. Eine Reihe von Verfahren zur Konstruktion von Dreiecksnetzen nach dem Delaunay-Kriterium sind veröffentlicht und viele Programme für die wissenschaftliche Anwendung frei verfügbar (HJELLE UND DÆHLEN 2006).

In einem Dreiecksnetz, das streng nach dem Delaunay-Kriterium konstruiert wird, ist nicht sicher, ob der Verlauf einer Linie auf den Dreiecksseiten durchgehend erhalten bleibt. Wenn die Erhaltung der Linie durch Tausch von Dreiecksseiten erzwungen wird, entspricht das Dreiecksnetz nicht mehr einem idealen Delaunay-Netz, weil möglicherweise ein Netzknoten innerhalb eines Dreiecks-Umkreises liegt. Eine weitere Anpassung ist die Berücksichtigung einer konkaven Außengrenze anstatt der konvexen Hülle der Netzknoten. Das ist eigentlich der Regelfall bei raumwissenschaftlichen Untersuchungen. Man spricht in diesen Fällen von einem eingeschränkten oder begrenzten Delaunay-Netz (*constrained Delaunay network*, CDT).

Im derzeitigen Stand der Anwendungsentwicklung werden die Netze in der zweidimensionalen Bezugsebene konstruiert. Da jedem Netzknoten ein z-Wert zugeordnet ist, wäre es sinnvoller, ein Netzwerk zu verwenden, das mit Qualitätskriterien für drei Dimensionen erzeugt wird. Diese Möglichkeit wird einbezogen, sobald die Software fertig gestellt ist.

3.2 Verdichtung des Grenznetzwerks

Die Ausgangsdaten für die volumenerhaltende Interpolation sind das Grenznetzwerk der Polygone und der Datenwert für jede Bezugseinheit. Bei der Anwendung eines unregelmäßigen Dreiecksnetzes müssen in jedes Polygon zusätzliche Punkte (*Steiner-Punkte*) eingesetzt werden. Wie bei der Verwendung eines regelmäßigen Gitters wird die Höhe der Punkte im Polygon iterativ verändert, mit dem Ziel einer glatten Oberfläche mit Erhaltung des Volumens über jedem Polygon. Das Dreiecksnetz aus Grenzlinien und zusätzlichen Punkten muss bestimmten Kriterien genügen:

- Das Netz muss so dicht sein, dass auch unterschiedlich große Polygone ausreichend Punkte enthalten, um eine glatte Oberfläche zu erzielen.
- Dreiecke mit sehr spitzen (oder sehr stumpfen) Winkeln sind zu vermeiden, weil die extreme Abweichung vom gleichseitigen Dreieck arithmetische und visuelle Probleme verursacht.

Insbesondere für Anforderungen in der computergestützten Konstruktion (CAD) wurden Verfahren für die Verdichtung von Netzen entwickelt, die den erwähnten und noch weiteren Ansprüchen genügen. Diese Netze werden auch als Qualitätsnetze (*quality meshes*) bezeichnet (SHEWCHUK 2002). Neben Modulen in kommerziellen CAD-Produkten sind Programme zur Verdichtung von Dreiecksnetzen frei verfügbar, zumindest für wissenschaftliche Anwendungen. Ein häufig angewendetes Programm ist *Triangle* (SHEWCHUK 1997, 2005). Die maximale Anzahl der Punkte, die regionale Verteilung der Dreiecke mit unterschiedlicher Größe in Abhängigkeit von der Ausgangsgeometrie, der maximale Flächeninhalt, die minimalen Innenwinkel der Dreiecke und noch andere Netzparameter lassen sich durch Programmoptionen steuern. Das Programm liefert, wenn gewünscht, auch nähere Angaben zum Gang der Optimierung und Statistiken zu den Eigenschaften des verdichteten Netzes.

Abbildung 3 zeigt zwei unterschiedliche Verdichtungsstufen des Grenznetzwerks der Raumordnungsregionen in der Bundesrepublik Deutschland. Die Grenzlinien wurden aus den vom Bundesamt für Kartographie und Geodäsie bereitgestellten Verwaltungsgrenzen sehr stark vereinfacht. Links ist ein Netz mit unterschiedlich großen Dreiecken in Abhängigkeit von der Verteilung der Grenzlinien abgebildet. Die Innenwinkel von etwa 99 Prozent aller Dreiecke sind größer als 30 Grad. Rechts ist ein etwa fünfmal dichteres Netz mit entsprechend kleineren Dreiecken gezeichnet. Für die Interpolation kann das Netz noch dichter sein, um eine möglichst glatte Oberfläche zu erzielen.

3.3 Volumenerhaltende Interpolation im TIN

Das Verfahren der volumenerhaltenden Interpolation im unregelmäßigen Dreiecksnetz läuft im Prinzip so ab wie für das regelmäßige Gitter. An einigen Stellen sind leichte Modifikationen zur Anpassung an die geometrischen Eigenschaften des unregelmäßigen Dreiecksnetzes erforderlich. Zum Beispiel ist die Zuordnung von Punkten zu Polygonen nicht mehr eindeutig wie im regelmäßigen Gitter. Die Punkte im Dreiecksnetz, die auf einer Polygongrenze liegen, gehören zu mindestens zwei Polygonen, die Knoten im Grenznetzwerk – dort laufen mindestens drei Linien zusammen – auch zu mehr als zwei Polygonen.

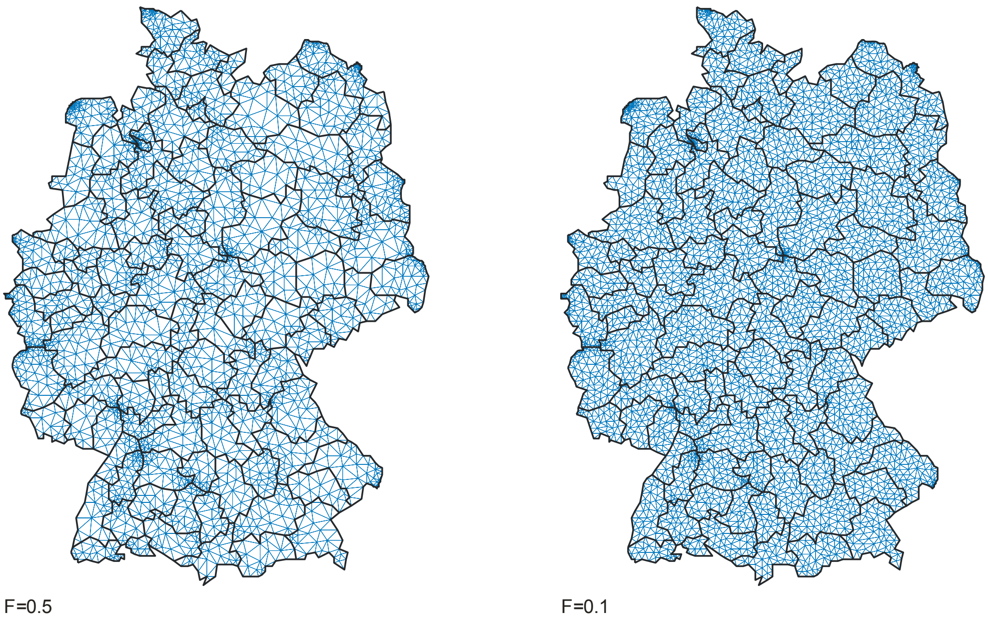

Abb. 3: Qualitätsnetze mit den Grenzen der Raumordnungsregionen. F ist der vorgegebene Wert für die maximale Fläche der Dreiecke (nicht maßstabsgerecht).

Für die Voreinstellung der Höhenwerte vor der Iteration wurde der Wert des Polygons eingesetzt, bei Punkten mit Mehrfachzuordnung der Durchschnitt aus den jeweils benachbarten Bezugseinheiten. Andere Verfahren zur Initialisierung sind denkbar, etwa die modifizierte Shepard-Interpolation (RENKA 1988), die Kerndichte-Schätzung (*kernel density estimation*, KDE) oder Trend-Oberflächen.

In Analogie zum Rechenverfahren im regelmäßigen Gitter wird im Glättungsschritt der entfernungsgewichtete Mittelwert aus den z-Werten der nächsten und mittelbaren Nachbarn angewendet (SHEPARD 1968). Nächste Nachbarn sind die Punkte im Netz, die über eine Netzwerk-Kante mit dem Bezugspunkt direkt verbunden sind. Mittelbare Nachbarn sind die nächsten Nachbarn der nächsten Nachbarn des Bezugspunktes. Für die Mittelwertbildung sind auch andere Rechenverfahren anwendbar, zum Beispiel die modifizierte Shepard-Interpolation oder ein lokales bivariates Polynom durch die Nachbarn.

3.4 Beispiele für die volumenerhaltende Interpolation

Die Methode der pyknophylaktischen Interpolation im regelmäßigen Gitter und im TIN wurde für verschiedene Indikatoren aus der Laufenden Raumbeobachtung des BBR angewendet. Die Abbildung 4 zeigt eine Oberfläche des Bruttoinlandsprodukts als stetige Oberfläche mit den Raumordnungsregionen als Bezugseinheiten. Die relative Rauheit liegt unter 0,002 Prozent, die mittlere Abweichung im Volumen ist 0,4 Prozent.

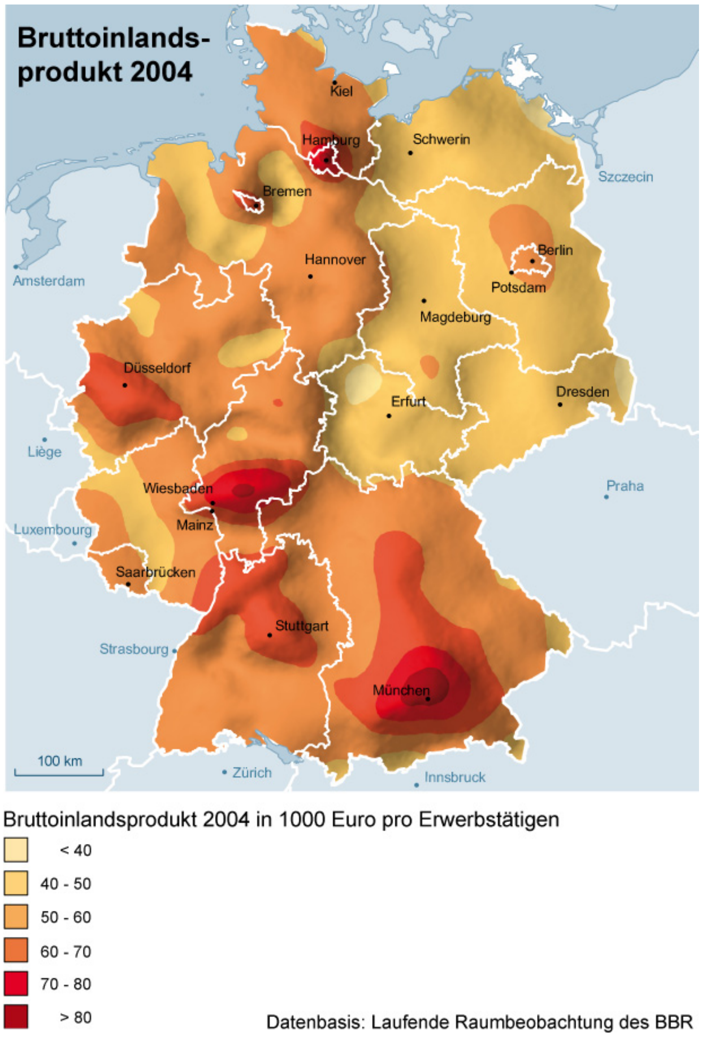

Abb. 4: Oberfläche des Bruttoinlandsprodukts pro Erwerbstätigen 2004. Bezugseinheiten sind die Raumordnungsregionen der Bundesrepublik Deutschland.

In Abbildung 5 ist eine Oberfläche des Bruttoinlandsprodukts pro Erwerbstätigen dargestellt, die aus Kreisregionen (Landkreise einschließlich kleinerer Städte) interpoliert wurde. Die Bezugseinheiten sind kleiner, deshalb hat die Oberfläche mehr regionale Variationen in der Höhe, mit zum Teil großen Unterschieden bei benachbarten Kreisen. Die durchschnittliche Abweichung der Soll- und Ist-Volumina liegt unter 0,1 Prozent. Die Oberfläche besteht aus etwa 147.000 Dreiecken, ohne die Dreiecke für die Grenzlinien. Das Bild in Abb. 5 ist der Preview eines 3D-Modells der Oberfläche, das mit Verfahren des *rapid prototyping* gefertigt wurde (RASE 2007).

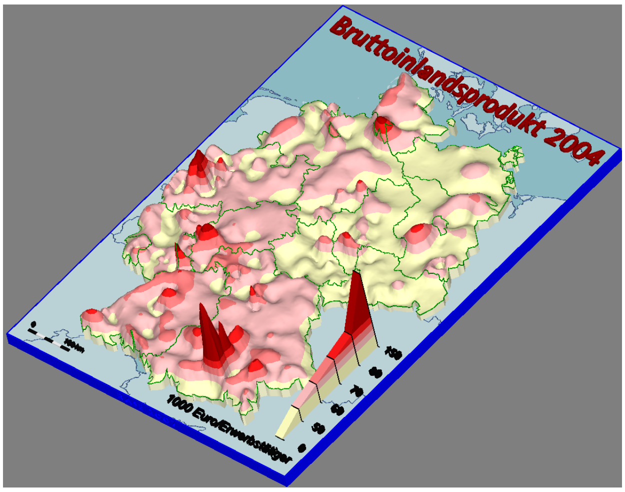

Abb. 5: 3D-Modell der Oberfläche des Bruttoinlandsprodukts pro Erwerbstätigen 2004. Bezugseinheiten sind die Kreisregionen (Landkreis und kleine Stadt zusammengefasst).

4 Fazit und Ausblick

Die Methode der pyknophylaktischen Interpolation erzeugt aus polygonbezogenen Daten kontinuierliche (glatte) Oberflächen mit weitgehender Erhaltung des Volumens für jede Bezugseinheit. Die Oberflächen eignen sich besser für die perspektivische oder echte dreidimensionale Darstellung als 3D-Choroplethenkarten. Je nach Datenkonstellation können allerdings bei der Interpolation regionale Abweichungen zwischen dem Soll- und Ist-Volumen auftreten, die nicht auflösbar sind. Mit einem regelmäßigen Gitter als Datenmodell für die Oberfläche sollten die Flächen nicht zu unterschiedlich in der Größe und nicht zu klein in Relation zur Maschenweite des Gitters sein.

Mit einem adaptiven unregelmäßigen Dreiecksnetz (TIN) als Datenmodell für die Oberfläche lässt sich das Problem der Polygone mit sehr unterschiedlichen Flächen und ungünstigen geometrischen Formen lösen. Die Verfahren zur Erzeugung von Qualitätsnetzen verdichten das Grenznetzwerk durch Einsetzen von zusätzlichen Punkten in die Polygone. Die Größe der Dreiecke und noch andere Eigenschaften des Netzes sind wählbar. Die Übertragung der Netzverdichtung auf drei Dimensionen (Qualitätsnetze mit Tetraedern) verbessert möglicherweise das visuelle Erscheinungsbild der Oberflächen.

Für die Voreinstellung der z-Werte vor der Iteration und die Mittelwertbildung während der Iteration sind weitere Rechenverfahren möglich. Deren Auswirkungen auf die visuellen Eigenschaften der fertigen Oberfläche müssen noch ausführlich untersucht werden.

Danksagung

Ich danke Prof. em. Waldo Tobler für die Unterstützung bei der Implementierung der volumenerhaltenden Interpolation und Prof. Jonathan Shewchuk für die kostenfreie Nutzung des Programmes Triangle.

Literatur

HJELLE, Ø. & DÆHLEN, M. (2006): Triangulations and applications. Springer, Heidelberg.

PEUCKER, T. K. , FOWLER, R. J., LITTLE, J. J., MARK, D. (1978), Digital representation of three-dimensional surfaces by triangulated irregular networks (TIN). Proceedings Digital Terrain Modeling Symposium, May 1978, ASP, 516-540.

RASE, W.-D. (1998): Modellierung und Darstellung von immateriellen Oberflächen. Forschungen Band 89, Bundesamt für Bauwesen und Raumordnung, Bonn.

RASE, W.-D. (2003)_ Von 2D nach 3D – Perspektivische Darstellungen, Stereogramme, reale Modelle. In: Kartographische Schriften, Band 7: Visualisierung und Erschließung von Geodaten. Kirschbaum-Verlag, Bonn, 13-24.

RASE, W.-D. (2007): Verfahren zur Herstellung von dreidimensionalen kartographischen Modellen. In: TZSCHASCHEL/WILD/LENTZ (Hrsg.): Visualisierung des Raumes: Karten machen – die Macht der Karten. Forum Institut für Länderkunde Leipzig, Heft 6/2007, 215-228.

RENKA, R. J. (1988), Algorithm 660: QSHEP2D, Quadratic Shepard method for bivariate interpolation of scattered data. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 14, No. 2, June 1988, 149-150.

SHEPARD, D. (1968), A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. Proceedings ACM National Conference 1968, 517-524.

SHEWCHUK, J. R. (1997), Delaunay refinement mesh generation. Ph.D. thesis, Technical Report CMU-CS-97-137, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA. http://www.cs.cmu.edu/~quake-papers/delaunay-refinement.pdf.

SHEWCHUK, J. R. (2002), What is a good linear element? Interpolation, conditioning, and quality measures. Proceedings 11th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, 115-126. http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/papers/elem.pdf.

SHEWCHUK, J. R. (2005), Triangle. A two-dimensional quality mesh generator and Delaunay triangulator. http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html.

TOBLER, W. R. (1979), Smooth pycnophylactic interpolation for geographical regions. Journal of the American Statistical Association, Vol. 74, No. 357, 519-535.