

# Dreidimensionale Karten für die großräumige Planung

Wolf-Dieter Rase

## 1 Von Choroplethenkarten zu 3D-Oberflächen

Die am häufigsten verwendeten Grunddaten für räumliche Analysen in der großräumigen Planung sind Aggregate für flächenhafte Bezugseinheiten, zum Beispiel die Anzahl der Einwohner für Gemeinden, Kreise oder Planungsregionen. Die absoluten Zahlen werden in den meisten Fällen normiert, indem man die Variable durch eine Bezugsgröße dividiert, etwa durch den Flächeninhalt der Einheit, die Einwohnerzahl oder die Zahl der Erwerbstätigen. Durch die Normierung wird die unterschiedliche Größe der Bezugseinheiten neutralisiert. Es entstehen relative Kennzahlen, mit denen interregionale Vergleiche und die Aufdeckung von regionalen Disparitäten besser möglich sind.

Die häufigste Darstellungsform für relative Daten ist die Choroplethenkarte. Der Zahlenbereich einer Variablen wird in Klassen eingeteilt. Die Klassenzugehörigkeit wird durch eine Signatur (Farbe, Muster) für jede Flächeneinheit in der Karte repräsentiert. Choroplethenkarten haben den Vorteil, dass durch die Vereinfachung des Variablenraums auf wenige Klassen die Analyse und der Vergleich erleichtert werden. Auch weniger geübte Kartennutzer können eine Choroplethenkarte gut interpretieren, vorausgesetzt, die grundsätzlichen Regeln für die Anwendung der visuellen Variablen wurden eingehalten. Mit der heute üblichen technischen Unterstützung der Raumanalyse durch Geo-Informationssysteme und kartographische Software ist die Herstellung einer Choroplethenkarte sehr einfach und schnell.

Die Choroplethenkarte hat den Nachteil, dass aus dem graphischen Bild der Karte nur die Klassenzugehörigkeit der Bezugseinheiten ersichtlich ist. Der tatsächliche Wert der Variablen für jede Einheit bleibt dem Kartenleser verborgen. Es gab zwar Versuche, durch proportionale Helligkeit oder variablen Schraffurabstand den ursprünglichen Variablenwert für jede Einheit rekonstruieren zu können.<sup>1</sup> Wie sich bald herausstellte,

ist das menschliche Auge-Hirn-System aber überfordert, um die kleinen Helligkeitsunterschiede zu erkennen und in den richtigen Bezug zu den Zahlenwerten zu setzen.

### *Dreidimensionale Karten*

Mit den neuen Medien, insbesondere der CD-ROM/DVD und dem World Wide Web, wurden die Verbreitungswege und Darstellungsmöglichkeiten für Karten erweitert. Es ist jetzt möglich, die zweidimensionalen Karten in die dritte Dimension auszuweiten, etwa durch interaktive perspektivische Darstellungen oder Stereogramme.<sup>2</sup> Die größten Nachteile von perspektivischen Zeichnungen auf Papier – etwa die Verdeckung von Teilen der Karte, optische Täuschungen oder die fehlende Ausmessbarkeit – werden durch interaktive Hilfsmittel beseitigt. Die dreidimensionale Karte kann durch Bewegungen des Mauszeigers beliebig gedreht und gekippt werden, Entfernungen und Richtungen lassen sich durch Setzen von Marken bestimmen. Durch Anklicken oder Überfahren einer Einheit mit dem Mauszeiger können die der Darstellung zugrunde liegenden Werte und noch andere Informationen direkt in einer Sprechblase oder einem Fenster sichtbar gemacht werden.

Es liegt deshalb nahe, nicht nur Teile der Erdoberfläche als 3D-Blockbild darzustellen, sondern auch dreidimensionale Choroplethenkarten für räumliche Analysen zu nutzen. Die Höhe der Prismen über den Polygonen der Bezugseinheiten ist proportional zum Wert der relativen Variablen. Der Vergleich der Einheiten ist nicht durch die Generalisierung auf Klassen eingeschränkt. Auf der anderen Seite bleiben die Klassen aber durch die Einfärbung der Prismen mit unterschiedlichen Farben erhalten, am besten mit farbkodierten Höhenstufen zur schnellen Abschätzung der Höhe (Abb. 1a).

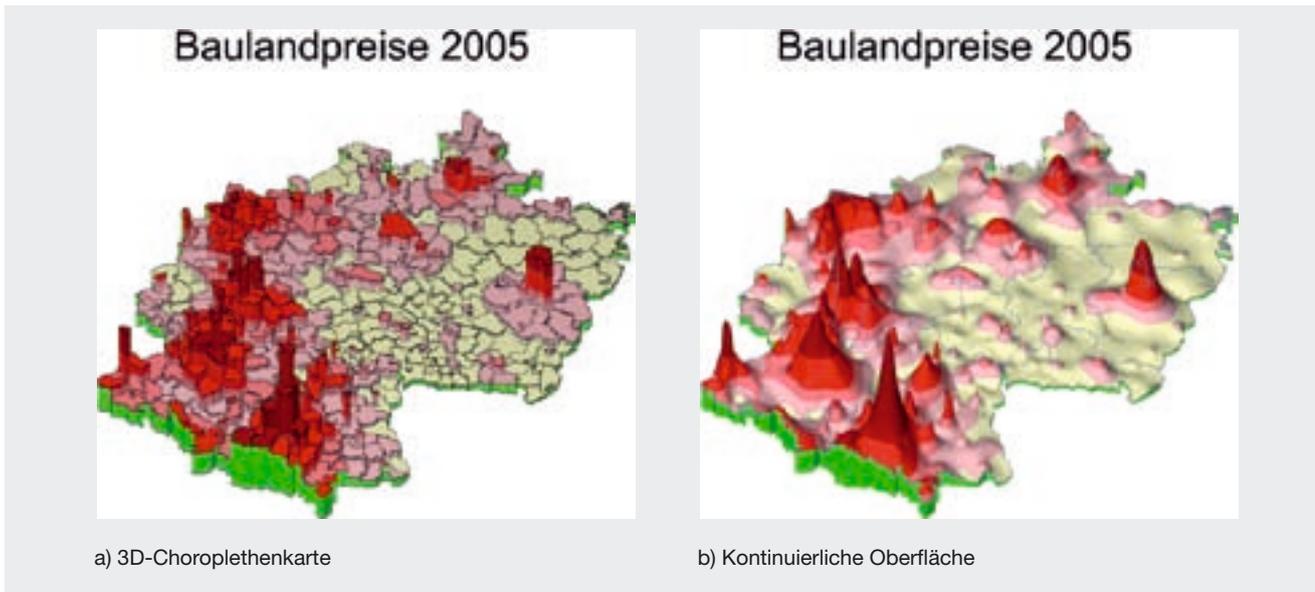
### *3D-Choroplethenkarten vs. stetige Oberflächen*

Der Mensch hat wie Tiere auch im Laufe seiner Entwicklung gelernt, aus den zweidimensionalen Bildern auf der Netzhaut bei der Augen eine dreidimensionale Szene zu

---

Dr. Wolf-Dieter Rase  
Kastanienweg 29  
D-53177 Bonn  
E-Mail: wolf.rase@t-online.de

Abbildung 1



a) 3D-Choroplethenkarte. Die Höhe der Prismen ist proportional zum Datenwert  
 b) Stetige Oberfläche mit dem gleichen Durchschnittswert für jede Bezugseinheit, aber Variationen in der Höhe innerhalb einer Einheit

rekonstruieren. Das stereoskopische Sehen war entwicklungsgeschichtlich die Voraussetzung für die optische Kontrolle der Feinmotorik beim Werkzeuggebrauch, aber genauso wichtig für die Abschätzung der Distanzen bei der Jagd und auf der Flucht vor Raubtieren. Die mentale Rekonstruktion der dreidimensionalen Realität scheint umso besser zu funktionieren, je mehr Helligkeitsabstufungen das zweidimensionale Bild enthält. In Abbildung 1 sind eine 3D-Choroplethenkarte und eine kontinuierliche Oberfläche nebeneinander dargestellt. Beide Karten repräsentieren die gleiche Variable. Bei der Choroplethenkarte sind die Deckel der Prismen parallel zur Bezugsebene angeordnet, jede Klasse erhält den gleichen Helligkeitswert. Bei der stetigen Oberfläche ist die Variation der Helligkeits- und Farbwerte größer. Der Winkel der Oberfläche zur Lichtquelle und damit die berechnete Helligkeit ändern sich häufiger. Die stetige Oberfläche ergibt ein angenehmeres Bild und wird wahrscheinlich besser erfasst.

Die Darstellung von Daten für die Raumanalyse als stetige Oberflächen kann ein geeignetes Komplement zu den Choroplethenkarten sein. Dies aus folgenden Gründen:

- Kontinuierliches Modell: Der Sachverhalt bzw. dessen Modell ist von Natur aus kontinuierlich. Die meisten geophysikalischen Variablen, zum Beispiel Luftdruck,

Temperatur oder Stärke des Erdmagnetfeldes, fallen in diese Kategorie.

- Quasi-kontinuierliches Modell: Das Modell, mit dem ein Sachverhalt durch Zahlen beschrieben wird, ist kontinuierlich oder zumindest so feinkörnig, dass es als kontinuierlich aufgefasst werden kann. Ein Beispiel aus der räumlichen Planung sind Zeitentfernungen und Erreichbarkeitswerte.
- Übergang von Diskreta zu Kontinua: Bei der für die großräumige Analyse adäquaten Körnigkeit wachsen diskrete Verteilungen so zusammen, dass sie als kontinuierliche Phänomene angesehen werden können.
- Verknüpfung von naturräumlichen und sozioökonomischen Variablen: Ein Zustand oder Prozess im Raum wird durch einen Indikator beschrieben, der durch Verknüpfung von naturräumlichen und sozioökonomischen Variablen entsteht. Die Grenzen von naturräumlichen Verbreitungsgebieten stimmen nur selten mit administrativen Grenzen überein. Die Darstellung als Teil- oder Schnittmengen in den administrativen Einheiten wird der Verteilung des Indikators im Raum nicht gerecht. Die starken Sprünge an den Grenzen der Gebietseinheiten entsprechen nicht der tatsächlichen Verteilung auf der Bezugsfläche.

- Repräsentation der dritten Dimension: In der Karte sollen der Flächenbezug, aber auch die absolute Größe des Indikators verdeutlicht werden. Eine Möglichkeit ist zum Beispiel die perspektivische Darstellung einer Choroplethenkarte mit höhenproportionalen Prismen (Abb. 1a), eine andere Möglichkeit eine stetige Oberfläche mit Erhaltung des Volumens über jeder Bezugseinheit (Abb. 1b).
- Trend-Oberflächen: Aus den Ausgangswerten wird eine kontinuierliche Funktion über die Dimensionen der Bezugsebene berechnet. Durch die Modellierung als Funktion sollen Ungenauigkeiten bei der Messung der Werte ausgeglichen oder ein genereller Trend in der Verteilung über die Erdoberfläche sichtbar gemacht werden.
- Räumliche Prädiktion: Aus einer Stichprobe werden Oberflächen berechnet, um Stützpunkten einen Näherungswert zuordnen zu können.

Im Folgenden wird die Interpolation von stetigen Oberflächen ausführlicher behandelt, die aus Daten von Modellrechnungen oder aggregatstatistischen Erhebungen berechnet werden. Typische Modellrechnungen in der großräumigen Planung sind die Ermittlung von Kennziffern für die Erreichbarkeit von Infrastruktureinrichtungen, etwa die durchschnittliche Reisezeit zum nächsten Mittel- oder Oberzentrum im Individualverkehr (Pkw). Aus demographischen und sozioökonomischen Daten, die als Aggregate für flächenhafte Bezugseinheiten vorliegen, lassen sich ebenfalls stetige Oberflächen konstruieren.

---

## 2 Interpolation von Oberflächen aus unregelmäßig verteilten Stützpunkten

---

Die Karten der Lufttemperatur, die wir jeden Abend im Wetterbericht sehen, werden aus den Messwerten interpoliert, die von vielen Wetterstationen auf dem festen Land und wenigen Stationen auf den Ozeanen erfasst werden. Das Netz von unregelmäßig verteilten und unterschiedlich weit auseinander liegenden Messpunkten wird durch eine Art intelligentes Raten so zu einer Oberfläche verdichtet, dass der Eindruck eines Kontinuums entsteht. Für die Interpolation werden zwischen den Mess-

punkten zusätzliche Punkte eingesetzt. Für jeden dieser Interpolationspunkte wird ein Höhenwert aus den Messwerten berechnet. Über den Verlauf der Kurve zwischen den Messpunkten werden Annahmen getroffen, die aus dem gesamten Datensatz, aus dem Verhalten in der Nachbarschaft oder aus dem Wissen über die Genese der Oberfläche abgeleitet werden.

### *Datenmodelle für die Interpolation von Oberflächen*

Zur Vereinfachung der Modellierung und Verarbeitung der Oberflächen wird angenommen, dass zu jedem Punkt in der Bezugsebene nur ein Höhenwert existiert. Solche Oberflächen werden manchmal auch 2½D-Oberflächen genannt, obwohl die Anzahl der Dimensionen eigentlich immer ganzzahlig ist. In einer „echten“ 3D-Oberfläche sind an einem Punkt in der Bezugsebene mehrere z-Werte erlaubt. Damit ist es möglich, in der Oberfläche senkrechte Wände, Überhänge und Höhlen einzubeziehnen. Die in Abbildung 1 dargestellten Seitenwände liegen außerhalb der Oberfläche.

Für die Anordnung der Interpolationspunkte auf der Bezugsebene werden zwei unterschiedliche Modelle angewendet: einmal das regelmäßige Gitter aus Rechtecken (Quadraten) oder gleichseitigen Dreiecken, zum anderen das unregelmäßige Dreiecksnetz (TIN). Die planaren Dreiecke oder Rechtecke, gleich oder unterschiedlich groß, bilden die Außenhaut der Oberfläche. Sie müssen ausreichend klein gewählt werden, um den visuellen Eindruck der Kontinuität hervorzurufen.

Die einfachste und deshalb auch am häufigsten angewandte Datenstruktur für 2½D-Oberflächen ist ein regelmäßiges Gitter aus Rechtecken oder Quadraten. Die Ebene wird durch Gitterlinien parallel zu den Achsen des Koordinatensystems geteilt, so dass gleich große Rechtecke oder Quadrate entstehen. Den Schnittpunkten der Gitterlinien werden die Höhenwerte der Oberfläche zugeordnet. Die Gitterstruktur ist sehr einfach in Computerprogrammen zu realisieren, weil in den meisten Programmiersprachen Sprachelemente für die Behandlung zweidimensionaler Felder vorhanden sind. Ein Gitter aus gleichseitigen Dreiecken hat einige theoretische Vorteile gegenüber dem Rechteck-Gitter, was aber in der prakti-

schen Anwendung kaum eine Rolle spielt. Obwohl der zusätzliche programmtechnische Aufwand für ein Netz aus gleichseitigen Dreiecken sehr gering ist, werden Gitter aus gleichseitigen Dreiecken kaum verwendet.

Regelmäßige Gitter haben den Nachteil, dass linienförmige geometrische Elemente, etwa Gebietsgrenzen, auf den Verlauf der Gitterlinien vergrößert werden. Der Informationsverlust ist auch bei relativ feinen Gittern manchmal nicht akzeptabel. Die Verringerung der Gitterweite auf die Auflösung der Linienelemente ist auch nicht immer möglich, weil die große Anzahl der Gitter-

terpunkte unzulässigen Aufwand für die Speicherung und Verarbeitung der Dateien und noch andere Probleme verursacht. Das unregelmäßige Dreiecksnetz (TIN, triangular irregular network)<sup>3</sup> ist ein geeignetes Datenmodell, um die linienförmigen Elemente in der notwendigen und gewünschten Auflösung in der Oberfläche zu erhalten. Gleichzeitig lässt sich die Netzdichte lokal variieren, um sie der Verteilung der Grunddaten optimal anzupassen (adaptives Netz).

#### Interpolationsverfahren für unregelmäßig verteilte Punkte

„Alles hängt mit allem zusammen, aber näheres hängt enger zusammen“, so das „Erste Gesetz der Geographie“ in der – nicht ganz ernst gemeinten – Formulierung von Tobler.<sup>4</sup> Eine Anwendung dieses „Gesetzes“ ist die Berechnung des  $z$ -Wertes an einem beliebigen Punkt in der Ebene (Interpolationspunkt) aus den  $z$ -Werten der benachbarten Datenpunkte. Für die Berechnung des Interpolationswertes geht man von folgenden Überlegungen aus:

- Der Höhenwert des Interpolationspunktes ist der Durchschnittswert aus den Höhen der benachbarten Stützpunkte.
- Ein Stützpunkt, der nahe beim Interpolationspunkt liegt, hat ein höheres Gewicht, also einen höheren Anteil am Durchschnittswert als ein Stützpunkt, der weiter entfernt ist.

Die  $z$ -Werte der benachbarten Stützpunkte werden bei der Berechnung des Durchschnitts für den Interpolationspunkt mit einem Faktor gewichtet. Die allgemeine mathematische Formulierung lautet

$$zin_i = \frac{\sum_{j=1}^m z_j * w_j}{\sum_{j=1}^m w_j}$$

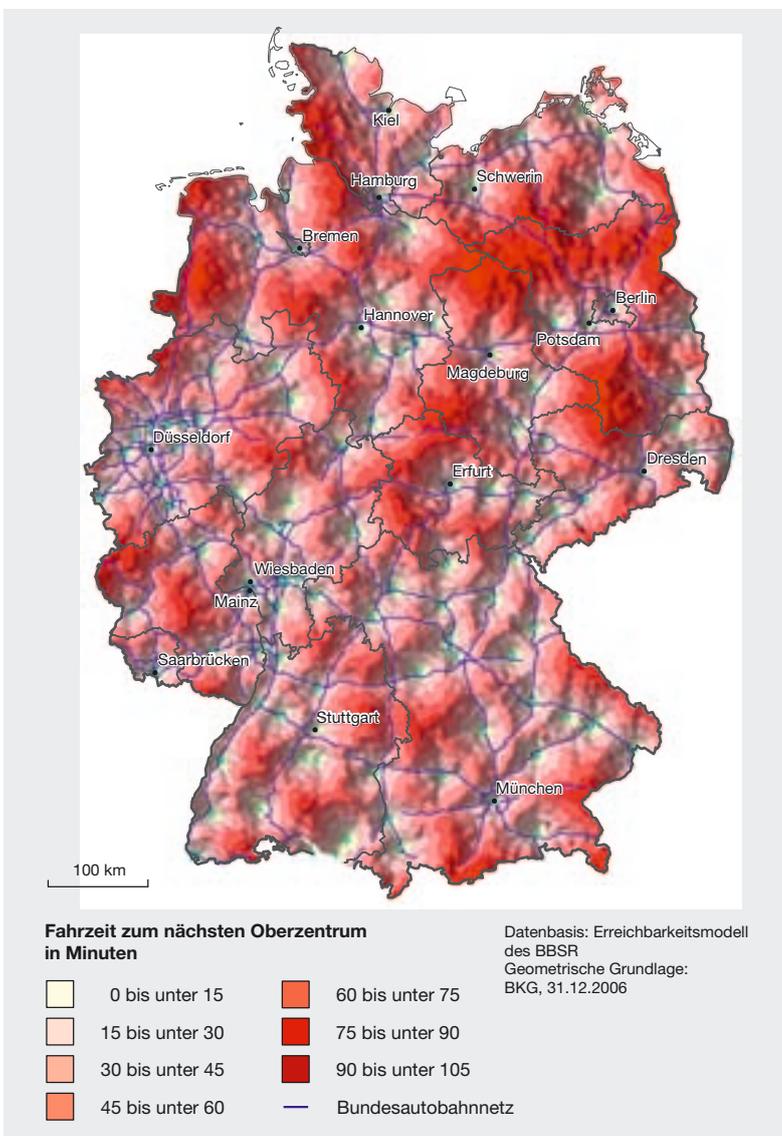
$zin_i$  = Höhenwert des zu interpolierenden Punktes

$z_j$  = Höhenwert des Punktes  $j$  der  $m$  benachbarten Punkte

$w_j$  = Gewichtungsfaktor für jeden benachbarten Punkt

Für die Interpolationsverfahren mit gewichteten Mittelwerten findet man in der englischsprachigen Literatur unter anderem die Begriffe *inverted distance weighted interpolation* (IDW), *moving averages*, *weigh-*

Abbildung 2  
Erreichbarkeiten der Oberzentren, Individualverkehr



Erreichbarkeit von Oberzentren im Erreichbarkeitsmodell des Bundesinstituts für Bau-, Stadt- und Raumforschung im BBSR. Die Höhe der Oberfläche ist proportional zur durchschnittlichen Fahrzeit in Minuten zum nächsten Oberzentrum.

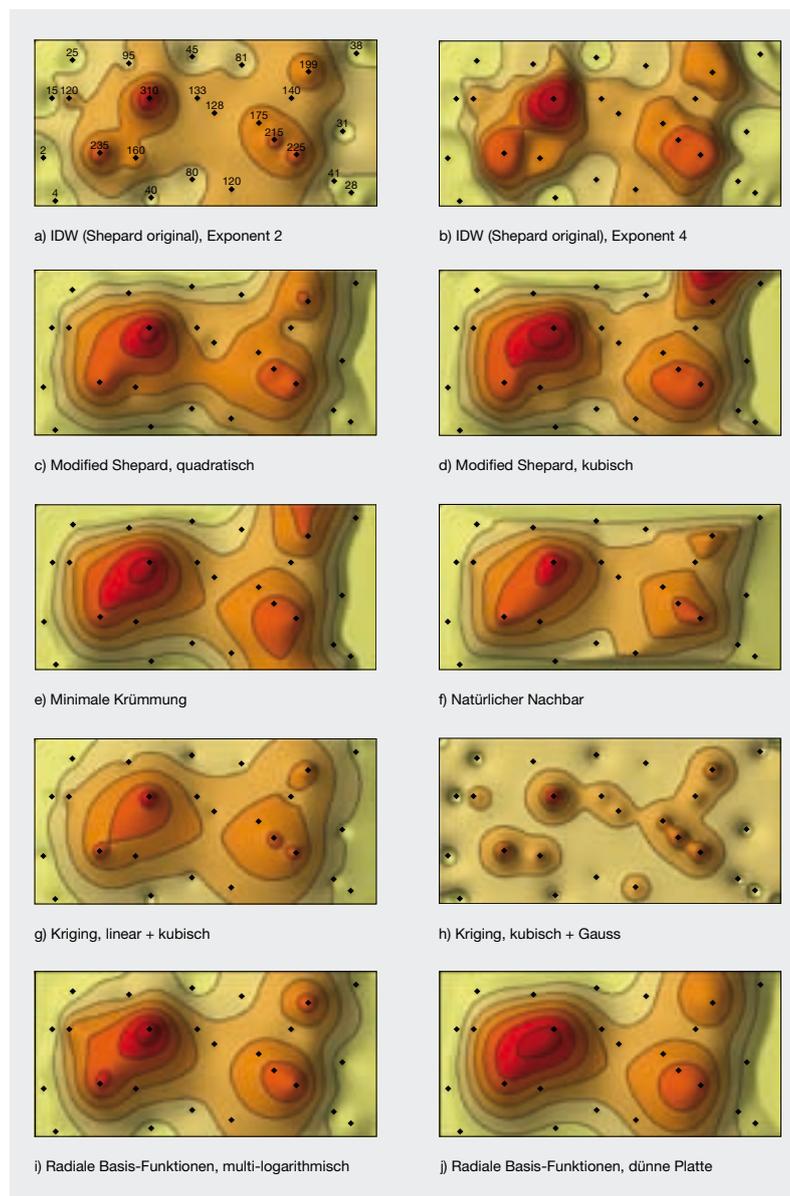
*ted moving averages, local weighted averaging* und noch andere Bezeichnungen.

Die Definition des Gewichtungsfaktors unterscheidet die verschiedenen Verfahren nach dem gemeinsamen Konzept der gewichteten Mittelwerte voneinander. Das Gewicht des benachbarten Punktes und damit sein Anteil am Mittelwert kann – im Sinne des „Ersten Gesetzes der Geographie“ – umgekehrt proportional zur Entfernung vom Interpolationspunkt gesetzt werden. Shepard<sup>5</sup> benutzt in Analogie zum Gravitationsmodell von Newton den Kehrwert der quadrierten Entfernung zur Gewichtung der Anteile an der Summe. Am Ort des Stützpunktes ist die Steigung der Kurve immer gleich 0, was bedeutet, dass kein Punkt in einem Hang liegen kann. Der Algorithmus hat den Vorteil, dass kein Wert der Oberfläche größer oder kleiner als die Extremwerte der Stützpunkte sein kann. Das Verfahren ist nicht gut geeignet für Messpunkte, die – verglichen mit der Auflösung des Oberflächennetzes – relativ weit auseinander liegen.

Franke und Nielson<sup>6</sup> haben deshalb eine andere Art der Gewichtung vorgeschlagen, die visuell bessere Oberflächen ergibt und als *modified Shepard* in einigen GIS-Paketen verfügbar ist. Mit der Implementierung von Renka<sup>7</sup> wurde die Oberfläche in Abbildung 2 interpoliert (siehe auch Abb. 3 c und d). Die Höhe der Oberfläche ist proportional zur durchschnittlichen Pkw-Fahrzeit zum nächstgelegenen Oberzentrum in Minuten, ermittelt im Erreichbarkeitsmodell des Bundesinstituts für Bau-, Stadt- und Raumforschung im BBR. Die Oberzentren liegen wie zu erwarten in den Tälern der Oberfläche (Kugeln in Magenta). Die Linien repräsentieren das Autobahnnetz als schnellste Verbindung für den Individualverkehr.

Ein in den Geowissenschaften häufig angewendetes Verfahren ist das *Kriging*, benannt nach dem Bergingenieur Krige. Das Verfahren ist in mehreren Varianten und vielen Parametern in vielen GIS-Paketen verfügbar. Es basiert ebenfalls auf der Berechnung des Durchschnitts aus den nächsten Nachbarn mit Gewichtung auf der Basis von geostatistischen Methoden (Abb. 3g, h). Die Anwendung von Kriging erfordert solides Expertenwissen in der geowissenschaftlichen Analyse und Modellbildung und muss deshalb mit der notwendigen Vorsicht angewendet werden.

Abbildung 3



Oberflächen, die mit dem gleichen Testdatensatz und unterschiedlichen Interpolationsverfahren und Parametern erzeugt wurden (Höhenwerte der Punkte in Karte a eingezeichnet).

Watson<sup>8</sup> nutzt bei seinem Verfahren der *natürlichen Nachbarn* die Flächenanteile im Voronoi-Diagramm der Messpunkte als Gewichte für die Mittelwertberechnung. Im Verfahren mit *minimaler Krümmung* (minimum curvature, Abb. 3e) wird das Konzept der dünnen elastischen Platte durch die Stützpunkte angewendet.<sup>9</sup> Die Oberfläche geht nicht notwendigerweise exakt durch die Stützpunkte, um die Krümmung mathematisch zu minimieren. Mit *radialen Basisfunktionen* in verschiedenen Varianten und Parametern können ebenfalls stetige Oberflächen interpoliert werden<sup>10</sup>, auch in der Option mit einer dünnen Platte (Abb. 3i, j).

Andere Konzepte nutzen die Spline-Verfahren mit Dreiecksnetz (zum Beispiel Renka<sup>11</sup>). Aus den Messpunkten wird ein Dreiecksnetz erzeugt und für jedes Dreieck eine quadratische oder kubische Gleichung angesetzt. Die Koeffizienten aller Gleichungen werden so adjustiert, dass die Oberflächen der Dreiecke glatt ineinander übergehen und insgesamt eine stetige Oberfläche bilden. Wie bei der Variante „dünne Platte“ der radialen Basisfunktionen (Abb. 3j) können die Parameter so gesetzt werden, dass die Oberfläche nicht exakt durch die Stützpunkte gehen muss, zugunsten der glatten Form der Oberfläche. In Programmen, die speziell auf die Interpolation und Kartierung von Oberflächen ausgerichtet sind, etwa das Programm Surfer<sup>12</sup>, findet man noch weitere Verfahren und Varianten.

Alle Interpolationsverfahren für Punkte sind sowohl für regelmäßige Gitter als auch für unregelmäßige Dreiecksnetze (TIN) anwendbar. Im Fall des regelmäßigen Gitters wird die Auflösung der Oberfläche, meistens weit höher als die Dichte der Datenpunkte, durch die Maschenweite vorgegeben. Für die Verdichtung des Dreiecksnetzes werden Verfahren zur Erzeugung von Qualitätsnetzen angewendet (dazu später mehr).

#### *Welches ist das beste Interpolationsverfahren?*

In Abbildung 3 wird deutlich, dass aus dem gleichen Datensatz viele verschiedene Oberflächen interpoliert werden können. Der Anwender steht nun vor dem Problem, aus den vielen Optionen in seinem Programmpaket das für seine Daten am besten geeignete Interpolationsverfahren zu finden. Gleich vorweg: Es gibt kein optimales Verfahren, deshalb kann die Frage in der Kapitelüberschrift nicht beantwortet werden.

Wie beurteilt man nun die Qualität der interpolierten Oberfläche und damit die Qualität und Eignung des Interpolationsverfahrens? Franke<sup>13</sup> gibt einige Anhaltspunkte für die Maßstäbe, die an ein Interpolationsverfahren und die damit erzeugten Oberflächen anzulegen sind:

- Genauigkeit
- visuelle Erscheinung
- Empfindlichkeit für Parameter-Änderungen.

Die bei Franke ebenfalls angeführten Parameter Rechenzeit, Speicherbedarf und Aufwand für die Implementierung sind heute aufgrund der Fortschritte in der Computertechnik und der Verfügbarkeit von geeigneter Software kaum noch relevant.

Man kann die *Genauigkeit* eines Verfahrens zum Beispiel dadurch prüfen, indem die Differenzen zwischen den Werten einer kontinuierlichen Funktion und an den gleichen Punkten interpolierten Werten analysiert werden. Dieses Verfahren hat aber wenig Aussagekraft für Oberflächen, mit denen wir der täglichen Praxis der Raumwissenschaften umgehen. Bei der Erdoberfläche oder bei geophysikalischen Kontinua sind vergleichende Tests mit Datensätzen denkbar, die Untermengen eines dichten Netzes von Stützpunkten sind (Eichnetz). Die mit der Submenge von Stützpunkten interpolierten Höhenwerte an den Eichpunkten werden mit den Höhenwerten im Eichnetz verglichen. Die Abweichungen können ein Hinweis auf die Qualität des Verfahrens sein.

Die Empfindlichkeit für die *Änderung von Parameterwerten* ist ein kritischer Punkt für viele Verfahren. Wenn eine geringe Änderung eines Parameters im Algorithmus eine deutlich andere Oberfläche ergibt, ist Vorsicht geboten. Dem Anwender wird – nicht nur in diesem Fall – nichts anderes übrig bleiben, als die Qualität der Interpolation anhand der *visuellen Erscheinung* der Oberfläche zu beurteilen. Für die gleichen Ausgangsdaten werden mehrere Oberflächen mit unterschiedlichen Verfahren interpoliert und dargestellt. Die Alternativen werden visuell geprüft, unter Nutzung des Fachwissens zu den Wirkungszusammenhängen der Variablen und der Genese der Oberfläche. Es wird die Oberfläche ausgewählt, die dem Expertenwissen visuell am besten entspricht. Der Vergleich ist natürlich subjektiv, und verschiedene Personen werden zu verschiedenen Zeitpunkten zu verschiedenen Ergebnissen kommen. Franke äußert aber berechtigte Zweifel, dass bei der visuellen Inspektion wirklich schlechte und ungeeignete Oberflächen unentdeckt bleiben.

Diese Art des „intelligenten Ratens“ scheint eine unwissenschaftliche Methode zu sein, weil keine objektiven und nachvollziehbaren Kriterien für die Beurteilung des Verfahrens und seine Eignung für einen bestimmten Zweck herangezogen werden. Die vi-

suelle Inspektion unter Nutzung des Expertenwissens ist aber meistens die einzig sinnvolle Möglichkeit der Beurteilung. Voraussetzung für die visuelle Prüfung sind adäquate Werkzeuge für die Darstellung der Oberfläche. In dieser Hinsicht sind seit der besagten vergleichenden Untersuchung von Franke große Fortschritte gemacht worden, etwa durch die Techniken der fotorealistischen Darstellung, durch interaktive Umgebungen und stereoskopische Darstellungsverfahren.

## 2.4 Trend-Oberflächen

Bei den bisher betrachteten Verfahren verläuft die Oberfläche möglichst exakt durch die Stützpunkte, das Kriterium für die Erhaltung der Ausgangsdaten in der interpolierten Kurve. Geht man von dieser Forderung ab und lässt Abweichungen am Ort der Messpunkte zu, steht ein Verfahren zur Visualisierung von großräumigen Trends zur Verfügung. Für die Konstruktion von Trend-Oberflächen wird durch alle Stützpunkte ein bivariates Polynom höherer Ordnung berechnet, für das die Summe der Abweichungsquadrate ein Minimum ist (Verfahren der kleinsten Quadrate, in Englisch *least squares* oder als Kürzel LSQ<sup>14</sup>). Die Ordnung oder der Grad des Polynoms definiert die Anzahl der Extremwerte in der Oberfläche, also die Berge und Täler.

In der praktischen Anwendung sind Polynomgrade bis zum Wert 8 oder 10 sinnvoll, weil bei höheren Polynomen Extremwerte entstehen, die durch das Rechenverfahren und nicht die Daten verursacht sein können. Abbildung 4 ist die Fotografie eines realen 3D-Modells mit einer Trend-Oberfläche fünften Grades. Der räumliche Trend der Arbeitslosenquoten in den östlichen Bundesländern liegt höher als in Süddeutschland, was zu erwarten war. Die relative Abweichung (*goodness of fit*) von der idealen Oberfläche, die exakt durch die Stützpunkte gehen würde, liegt in diesem Fall bei 87 %. Bei höherem Polynomgrad erhöht sich diese Zahl meistens.

Genauso wichtig wie die Trend-Oberfläche für die Beurteilung der räumlichen Situation ist die Analyse der Residuen. Die Residuen sind die Abweichungen zwischen dem originalen *z*-Wert des Datenpunktes und dem Wert des Polynoms am Ort des Datenpunktes. Im Modell der Abbildung 4 sind

die absoluten Werte der Residuen als Säulen im gleichen Höhenmaßstab wie die Oberfläche dargestellt. Das negative Vorzeichen (Quote kleiner als der Trend) ist durch die Farbe Cyan, das positive Vorzeichen (Quote größer als der Trend) durch Magenta repräsentiert. In Süddeutschland sind die Residuen insgesamt geringer als in den anderen Regionen. Das Land Berlin und die unmittelbar benachbarten Regionen haben eine geringere Arbeitslosenquote, als der Trend anzeigt (Säulen in Cyan), andere Regionen eine höhere Arbeitslosenquote (Säulen in Magenta).

Andere in den Raumwissenschaften angewandte Methoden für die Aufdeckung und Visualisierung von räumlichen Mustern erzeugen ebenfalls stetige Oberflächen. Diese Verfahren sind aber keine Interpolationen im bisher benutzten Sinn. Die Oberfläche ist keine räumliche Prädiktion, also eine Art intelligentes Raten der Eigenschaften zwischen den Stützpunkten, sondern das Ergebnis der Modellbildung aufgrund eines mathematischen Verfahrens. Beispiele für diese Methoden sind die Kerndichte-Schätzung in verschiedenen Varianten (KDE, *kernel density estimation*)<sup>15</sup> oder die Potenzialanalyse<sup>16</sup>. Diese Methoden ergeben zwar eine kontinuierliche Oberfläche, aber Höhe und Verlauf der Kurve stehen nicht in unmittelbarem und direkt sichtbarem Bezug zu den Ausgangsdaten.

Abbildung 4



Trend-Oberfläche 5. Grades der Arbeitslosenquoten (Raumordnungsregionen). Die Höhe der Säulen ist proportional zum absoluten Wert der Residuen. Bei Arbeitslosenquoten kleiner als die Oberfläche sind die Säulen in Cyan, bei Quoten größer als die Oberfläche in Magenta eingefärbt.

### 3 Volumenerhaltende Interpolation aus polygon-bezogenen Daten

Die überwiegende Anzahl von Indikatoren zur Messung regionaler Disparitäten wird aus Daten berechnet, die mit einer flächenhaften Bezugseinheit assoziiert sind. Zur Interpolation von stetigen Oberflächen aus flächenbezogenen Daten wird in GIS-Paketen wie ArcGIS ein punktorientiertes Verfahren angewendet. Jeder Flächeneinheit wird als geometrischer Stellvertreter ein Punkt zugeordnet (wie vorher bei den Trend-Oberflächen), dann zusammen mit dem Datenwert die Oberfläche interpoliert. Bei der punktorientierten Methode ist aber nicht garantiert, dass eine wichtige Eigenschaft der Ausgangsdaten erhalten bleibt: Das Volumen über den Bezugspolygonen ist in den meisten Fällen nicht identisch mit dem Volumen der Prismen in einer 3D-Choroplethenkarte wie in Abbildung 1b.

#### *Die Methode der pyknophylaktischen Interpolation*

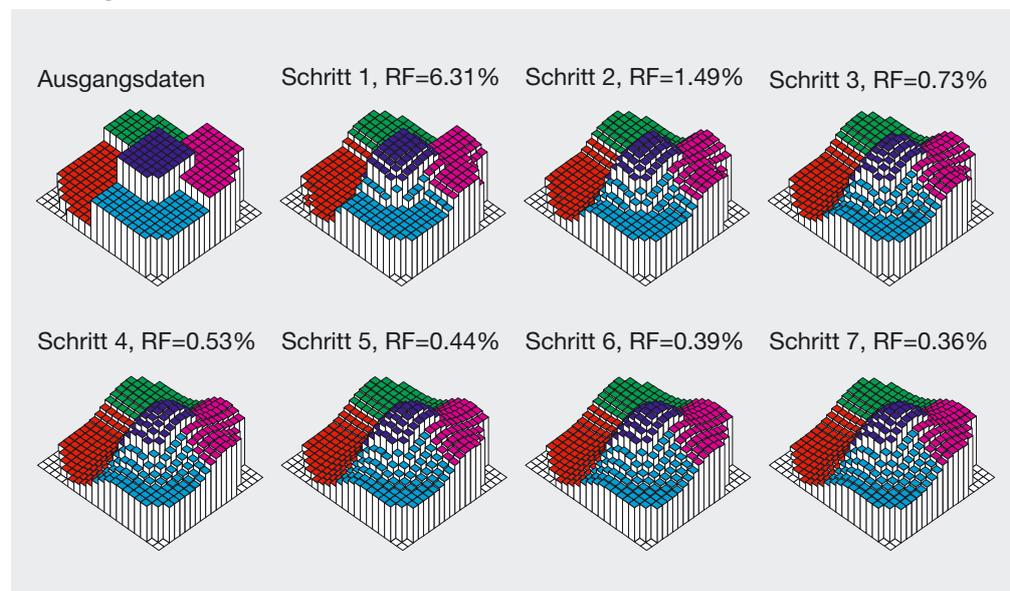
Zur Berechnung einer stetigen Oberfläche aus flächenbezogenen Daten mit Volumenerhaltung hat Tobler<sup>17</sup> die Methode der *pyknophylaktischen Interpolation* entwickelt. Die volumenerhaltende Interpolation – so die Bedeutung der griechischen Namensbestandteile *pyknos* und *phylax* – ist ein iteratives Verfahren mit folgenden Arbeitsschritten:

1. Die Polygonflächen werden auf die Punkte eines regelmäßigen Gitters abgebildet und jedem Punkt wird die Anfangshöhe (Volumen/Grundfläche) zugeordnet.
2. Für jeden Gitterpunkt wird der Durchschnitt aus den z-Werten der Nachbarn im Gitter berechnet. Tobler schlägt für diese Berechnung zwei Optionen vor: einmal der Durchschnitt aus den vier unmittelbaren Nachbarn, zum zweiten ein gewichteter Mittelwert aus den zwölf nächsten Nachbarn.
3. Nach der Glättung wird die Erhaltung des Volumens für jede Bezugseinheit kontrolliert. Das Ist-Volumen wird durch anteilige Korrektur der z-Werte dem Sollvolumen angenähert. Die Volumenerhaltung ist also ein Bestandteil des Verfahrens und kein mehr oder weniger zufälliges Ergebnis wie bei der Interpolation mit Punkten als geometrischer Stellvertreter für Polygone.

Die Schritte 2 und 3 werden solange wiederholt, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist, etwa die maximale Anzahl der Zyklen, ein Grenzwert für das Maß der Rauheit (oder Glätte) der Oberfläche oder die Abweichung von Ist- und Sollwert der Volumina.

Das Beispiel mit einem Testdatensatz (Abb. 5) zeigt, dass das Verfahren sehr schnell konvergiert. Mit bloßem Auge sind ab Schritt fünf kaum noch Veränderungen sichtbar.

**Abbildung 5**



Ablauf der Iteration bei einem Testdatensatz. RF = Maßzahl für die Rauheit der Oberfläche

auch die Rauheit nimmt nicht mehr signifikant ab. Bei realen Datensätzen wie in Abbildung 6 reichen meistens 20 bis 40 Iterationen, um eine ausreichend glatte Oberfläche mit minimalem Fehler zwischen Ist- und Sollvolumen zu erhalten.

Wenn die Höhenwerte von direkt benachbarten Bezugsseinheiten sehr voneinander abweichen, kann die Abweichung zwischen dem Istwert des Volumens und dem Sollwert so groß sein, dass sie nicht mehr vernachlässigbar ist. Zum Beispiel sind die Einwohnerzahlen und damit die Einwohnerdichten bei den Stadtstaaten Berlin, Hamburg und Bremen in Relation zum Umland sehr hoch. Bei der Glättung werden die Volumina nicht mehr vollständig zwischen den benachbarten Einheiten ausgeglichen. Das Problem lässt sich nur lösen, wenn eigentlich unlogische Zustände zugelassen werden. Logisch ist in diesem Fall, dass die Anzahl der Einwohner und damit auch die Einwohnerdichte nicht negativ sein können. Wird dieses Prinzip für alle Gitterpunkte in einer Bezugsseinheit durchgehalten, ergeben sich große Abweichungen zwischen den Stadtstaaten und ihrem Umland (Abb. 6a).

Lässt man innerhalb eines Polygons auch negative Werte für einzelne Gitterpunkte zu, werden die Abweichungen in den Volumina für alle Polygone erheblich geringer. Das Volumen und der Durchschnitt der Höhen-

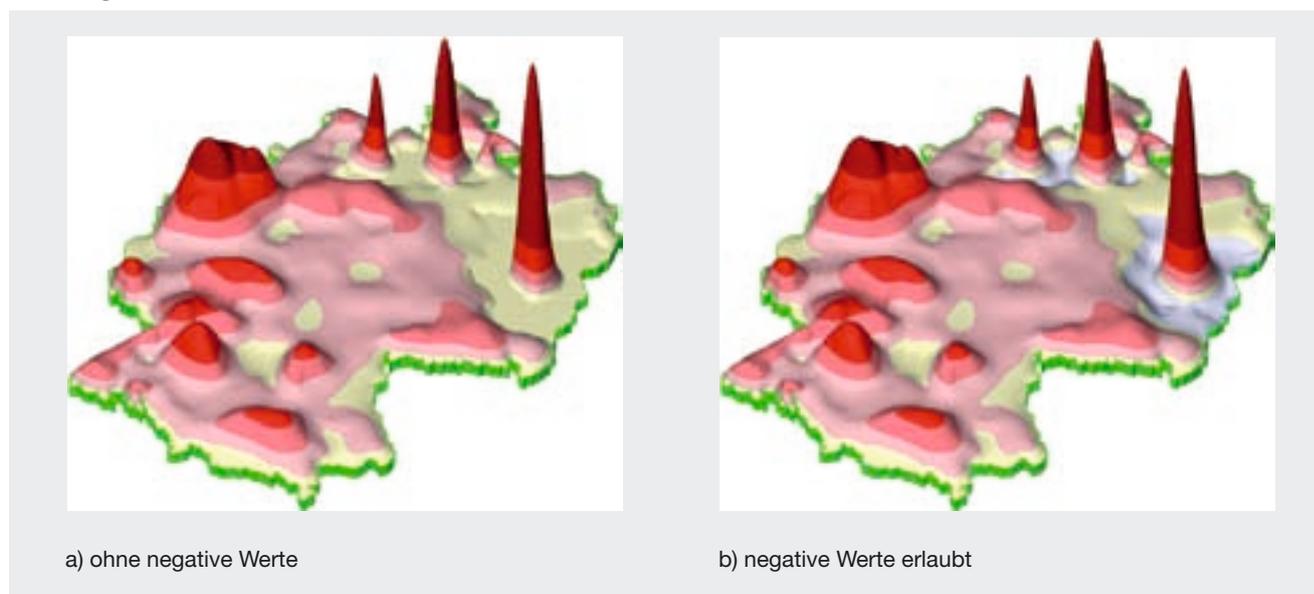
werte für jedes Polygon bleiben aber immer im positiven Bereich und nahe dem Sollwert. In Abbildung 6b kann man erkennen, dass um die Stadtstaaten herum die Oberfläche mehr eingedellt ist und einige Teile im negativen Bereich liegen, die in der Abbildung mit einem blauen Farbton sichtbar gemacht worden sind.

#### *Volumenerhaltende Interpolation im unregelmäßigen Dreiecksnetz*

Die Anwendung des regelmäßigen Gitters als Oberflächenmodell hat den Nachteil, dass die Grenzlinien der Bezugspolygone auf die Gitterlinien vereinfacht werden. Sollen die Punkte auf den Grenzlinien erhalten bleiben, muss ein unregelmäßiges Dreiecksnetz (TIN) als Datenmodell verwendet werden. Die Ausgangsdaten für die Generierung des Dreiecksnetzes ist das Grenznetzwerk. In jedes Polygon und damit in das gesamte Netz müssen zusätzliche Punkte eingesetzt werden, um innerhalb des Polygons die Höhe variieren zu können, als Voraussetzung für die Annäherung an eine annähernd glatte Oberfläche. Das Dreiecksnetz aus den Grenzlinien der Bezugspolygone und zusätzlichen Punkten soll bestimmten Kriterien genügen:

- Das Netz muss so dicht sein, dass alle Bezugspolygone, ob klein oder groß, ausrei-

Abbildung 6



Anzahl der Einwohner (Volumen) und Einwohnerdichte (Höhe) in den Raumordnungsregionen; links mit Ausschluss „unlogischer“ Werte und daraus resultierenden Abweichungen um die Stadtstaaten, rechts mit negativen Werten und vernachlässigbaren Abweichungen von Ist- und Sollvolumen.

chend Punkte enthalten, um eine visuell glatte Oberfläche zu erhalten.

- Dreiecke mit sehr spitzen (oder sehr stumpfen) Winkeln sind zu vermeiden, weil die extreme Abweichung vom gleichseitigen Dreieck arithmetische und visuelle Probleme verursacht.
- Die Abstände von Nachbarpunkten zu Interpolationspunkten dürfen nicht zu klein sein, um arithmetische Probleme aufgrund der Darstellungsgenauigkeit von Zahlen in einem Computer zu verhindern.

Für Modellrechnungen in der computergestützten mechanischen Konstruktion und anderen Simulationsmethoden wurden Verfahren für die Verdichtung von Netzen entwickelt, die den genannten und noch weiteren Kriterien genügen. Diese Netze werden Qualitätsnetze (*quality meshes*) genannt. Für die Implementierung der pyknophylaktischen Interpolation in einem unregelmäßigen Dreiecksnetz wurden die Qualitätsnetze mit dem Programm Triangle erzeugt.<sup>18</sup> Der Algorithmus der volumenerhaltenden Interpolation mit dem unregelmäßigen Dreiecksnetz ist im Prinzip identisch mit dem Algorithmus für das regelmäßige Gitter. An einigen Stellen sind leichte Modifikationen erforderlich, um den veränderten geometrischen Eigenschaften Rechnung zu tragen. Die Zuordnung von Punkten zu Polygonen ist zum Beispiel nicht mehr so eindeutig wie im regelmäßigen Gitter. Die Punkte im Dreiecksnetz, die auf einer Polygongrenze liegen, gehören zu mindestens zwei Polygonen, die Knoten im Grenznetzwerk – dort laufen mindestens drei Linien zusammen – auch zu mehr als zwei Polygonen.

Im Glättungsschritt wird, in Analogie zu den Verfahren im regelmäßigen Gitter, der entfernungs gewichtete Mittelwert aus den z-Werten der Nachbarpunkte des unregelmäßigen Dreiecksnetzes angewendet. Die unmittelbaren Nachbarn sind die Punkte, die über eine Netzwerkkante mit dem Bezugspunkt direkt verbunden sind. Die zweite Möglichkeit ist die Einbeziehung der mittelbaren Nachbarn, der Nachbarn der direkten Nachbarn um den Bezugspunkt. Bei sehr dichten Netzen mit den unmittelbaren Nachbarn in kurzer Entfernung sollte die Glättung mit mehr als den unmittelbaren Nachbarn erfolgen.<sup>19</sup>

Die Korrektur der Höhenwerte zur Erzwingung der Volumenerhaltung wird im Prinzip nach dem gleichen Verfahren wie bei der Anwendung des regelmäßigen Gitters ausgeführt. Für den Abbruch der Iteration gelten die gleichen Kriterien wie bei der Anwendung des regelmäßigen Gitters. Die Implementierung ist etwas aufwendiger und der Rechengang dauert etwas länger, weil nicht die einfachen Datenstrukturen und die implizite Geometrie des regelmäßigen Gitters genutzt werden können. Dazu muss die Zugehörigkeit von Grenzpunkten zu zwei und mehr Polygonen berücksichtigt werden.<sup>20</sup>

#### *Regelmäßiges Gitter oder unregelmäßiges Dreiecksnetz?*

Die implizite Topologie des regelmäßigen Gitters erlaubt schnellere Zugriffe auf die Daten. Deshalb sind die Rechenzeiten für die volumenerhaltende Interpolation in der Regel kürzer als mit einem unregelmäßigen Gitter aus Dreiecken. Weichen die Größen der Bezugseinheiten nicht wesentlich voneinander ab, sollte ein regelmäßiges Gitter verwendet werden. Ein Beispiel für eine solche Raumgliederung mit etwa gleich großen Einheiten sind die Raumordnungsregionen in der Bundesrepublik. Bei sehr großen Abweichungen in der Größe der Polygoneflächen oder ungünstigen geometrischen Formen der Polygone kann es vorkommen, dass die Polygone nicht oder mit einer zu kleinen Anzahl von Punkten auf das Gitter abgebildet werden. Auf der administrativen Ebene der Kreise in der Bundesrepublik sind die Unterschiede in der Fläche von Landkreisen und kreisfreien Städten oft sehr groß. Eine Verfeinerung des Gitters hilft nur bis zu einem gewissen Grad, denn bei sehr kleinen Maschenweiten neigt das Interpolationsverfahren zur Ausformung von Plateaus in großen Polygonen.

Die Geometrie der Polygongrenzen bleibt erhalten, wenn ein unregelmäßiges Netz von Dreiecken als Oberflächenmodell verwendet wird. Weiterhin ist dessen Anwendung ratsam, wenn die Größen der Polygone sehr unterschiedlich sind und sehr unregelmäßige Polygonformen auftreten. Durch Auswahl der geeigneten Parameterwerte für die Erzeugung des Qualitätsnetzes ist dafür zu sorgen, dass in jedem Polygon eine ausreichende Anzahl von zusätzlichen Punkten vorhanden ist. Bei vergleichbarer Auflösung

in beiden Datenmodellen sind mit dem bloßen Auge kaum Unterschiede in der interpolierten Oberfläche zu erkennen. Wegen der adaptiven Eigenschaften des unregelmäßigen Dreiecksnetzes ist theoretisch die Anzahl der Dreiecke für die Oberfläche etwas niedriger. In der Praxis spielt dieser Vorteil aber so gut wie keine Rolle, wenn für die Erzeugung des Qualitätsnetzes minimale Innenwinkel und maximale Dreiecksflächen vorgegeben werden.

Die Erfahrungen mit der Anwendung von unregelmäßigen Dreiecksnetzen für die pyknophylaktische Interpolation haben ergeben, dass vor der Verdichtung des Grenznetzwerks zu einem Qualitätsnetz unbedingt eine dem Darstellungsmaßstab angemessene Vereinfachung der Grenzlinien und die Beseitigung von sehr kurzen Linien erfolgen müssen. Wegen der hohen Linienauflösung entstehen sonst sehr viele kleine Dreiecke. Abgesehen von höheren Rechenzeiten wird dadurch möglicherweise auch das Ergebnis der Iteration beeinflusst. Bei sehr kleinen Dreiecken können arithmetische Fehler aufgrund der endlichen Genauigkeit der Zahlendarstellung entstehen. Für die Interpolation im regelmäßigen Gitter spielt die Auflösung der Grenzlinien keine Rolle.

---

#### 4 Darstellung der Oberflächen

---

In den Abbildungen finden sich einige Beispiele für unterschiedliche Techniken der Darstellung von Oberflächen, die aus für die Raumanalyse typischen Daten interpoliert wurden. In den Abbildungen 2 und 3 wird der räumliche Eindruck durch eine simulierte Beleuchtung aus Nordwesten verstärkt. Die Oberfläche wirkt viel plastischer als mit der sonst üblichen Darstellung nur mit Isoplethen. In den Abbildungen 1 und 6 werden perspektivische Darstellungen genutzt. Die statische Darstellung auf Papier erlaubt nicht die Lösung von Betrachtungskonflikten, etwa die Aufdeckung verbor-

gener Teile durch Drehen und Kippen des Blockbildes wie in einer interaktiven Umgebung.

Abbildung 4 ist die Fotografie eines echten 3D-Modells der Trend-Oberfläche mit Darstellung der Residuen. Das Modell wird auf einem 3D-Drucker schichtweise aus Pulver und selektiv aufgesprühten Klebstoffen in vier Farben aufgebaut. Die Einzelheiten des Verfahrens und des Arbeitsablaufs sind bei Rase<sup>21</sup> beschrieben.

Die Verfahren, die in den letzten Jahren zur 3D-Visualisierung entwickelt wurden, lassen sich auch für die Darstellung von kartographischen Oberflächen einsetzen.<sup>22</sup> Leider ist ein Printmedium für die Demonstration dieser Techniken schlecht geeignet. Deshalb können die Verfahren hier nur erwähnt und kann sonst auf weiterführende Literatur und Internetadressen verwiesen werden. Mit *Lentikular-Folien* lassen sich sehr beeindruckende stereoskopische Bilder von Oberflächen herstellen, ohne dass zum Betrachten optische Hilfsmittel wie Brillen erforderlich sind.<sup>23</sup> Etwas aufwendiger sind *Shutter-Brillen*, die zusammen mit dafür geeigneten Flachbildschirmen Stereogramme von beliebigen 3D-Körpern erzeugen. Beeindruckende Effekte werden mit Techniken der *virtuellen Realität* (VR) erzielt, die ein scheinbares Eintauchen in eine von der Software simulierte Umgebung und die Mischung von realer und virtueller Welt ermöglichen<sup>24</sup>, leider noch zu nicht unerheblichen Kosten.

#### Danksagung

Mein Dank geht an Waldo Tobler für seinen Rat und Unterstützung bei der Implementierung der Methode der pyknophylaktischen Interpolation und an Jonathan Shewchuk für die kostenfreie Nutzung des Programms Triangle zur Erzeugung von Qualitätsnetzen.

## Anmerkungen

- (1) U. a. Tobler, W. R.: Choropleth maps without class intervals? *Geographical Analysis* 5 (1973), S. 262–265
- (2) Rase, W.-D.: Von 2D nach 3D – Perspektivische Darstellungen, Stereogramme, reale Modelle. In: *Visualisierung und Erschließung von Geodaten*. – Bonn 2003. = *Kartographische Schriften*, Band 7, S. 13–24
- (3) Peucker, T.K.; Fowler, R.J.; Little, J.J.; Mark, D.: Digital representation of three-dimensional surfaces by triangulated irregular networks (TIN). In: *Proceedings Digital Terrain Modeling Symposium*, May 1978, ASP, S. 516–540
- (4) Tobler, W.R.: A computer movie simulating urban growth in the Detroit region. *Economic Geography* 46 (1970), S. 234–240
- (5) Shepard, D.: A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced data. In: *Proceedings ACM 23rd National Conference* 1968, S. 517–524
- (6) Franke, R.; Nielson, G.: Smooth interpolation of large sets of scattered data. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15 (1980), S. 1691–1704
- (7) Renka, R.J.: Algorithm 660: QSHEP2D, Quadratic Shepard method for bivariate interpolation of scattered data. *ACM Transactions on Mathematical Software* 14 (1988) 2, S. 149–150
- (8) Watson, D.F.: *Contouring: A guide to the analysis and display of spatial data*. – Oxford 1992
- (9) Smith, W.H.F.; Wessel, P.: Gridding with continuous curvature splines in tension. *Geophysics* 55 (1990) 3, S. 293–305
- (10) Franke, R.: Scattered data interpolation: tests of some methods. *Mathematics of Computation*, Vol. 38, No. 157, January 1982, S. 181–200
- (11) Renka, R. J.: Algorithm 624, Triangulation and interpolation at arbitrarily distributed points in the plane. *ACM Transactions on Mathematical Software* 10 (1984) 4, S. 440–442
- (12) Surfer Version 9 (2009): Golden Software, Boulder, CO ([www.goldensoftware.com](http://www.goldensoftware.com))
- (13) Franke, R.: *Scattered data interpolation*, a.a.O.
- (14) Bartels, R.H.; Jezioranski, J.J.: Least-squares fitting using orthogonal multinomials. *ACM Transactions on Mathematical Software* 11 (1985) 3, S. 201–222
- (15) Silverman, B.W.: *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. – New York 1984
- (16) Klimesch, H.: *Die Potentialkarte: Ein Hilfsmittel zur Darstellung wirtschaftsgeographischer Strukturen*. – Sindelfingen 1967
- (17) Tobler, W.R.: Smooth pycnophylactic interpolation for geographical regions. *Journal of the American Statistical Association* 74 (1979) 357, S. 519–535 ([www.geog.ucsb.edu/~tobler/publications/pdf\\_docs/geog\\_analysis/Pycno.pdf](http://www.geog.ucsb.edu/~tobler/publications/pdf_docs/geog_analysis/Pycno.pdf))
- (18) Shewchuk, J.R.: *Triangle. A two-dimensional quality mesh generator and Delaunay triangulator* ([www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html](http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html))
- (19) Rase, W.-D.: *Volumenerhaltende Interpolation aus polygonbezogenen Daten in regelmäßigen und unregelmäßigen Netzen*. Technischer Report 2009 ([www.wdrase.de/PycnoInterReport.pdf](http://www.wdrase.de/PycnoInterReport.pdf))
- (20) Rase, W.-D.: *Volumenerhaltende Interpolation aus polygonbezogenen Daten in einem unregelmäßigen Dreiecksnetz (TIN)*. In: *Angewandte Geoinformatik 2007. Beiträge zum 19. AGIT-Symposium Salzburg*. Hrsg.: Strobl/Blaschke/Griesebner. – Heidelberg 2007, S. 595–604 ([www.wdrase.de/VolumenerhaltendeInterpolationAGIT2007.pdf](http://www.wdrase.de/VolumenerhaltendeInterpolationAGIT2007.pdf))
- (21) Rase, W.-D.: *Verfahren zur Herstellung von dreidimensionalen kartographischen Modellen*. In: *Visualisierung des Raumes: Karten machen – die Macht der Karten*. Hrsg.: Tzschaschel/Wild/Lentz. Leipzig 2007. = *Forum Institut für Länderkunde Leipzig*, Heft 6/2007, S. 215–228 ([www.wdrase.de/3DModelleLeipzig2006.pdf](http://www.wdrase.de/3DModelleLeipzig2006.pdf))
- (22) Rase, W.-D.: *Von 2D nach 3D*, a.a.O.
- (23) [www.mbmbmsystems.de](http://www.mbmbmsystems.de)
- (24) Paelke, V.; Brenner C.: *Development of a mixed reality device for interactive on-site geovisualization*. In: *Proc. SimVis 2007, 18th Conf. on Simulation and Visualisation, Magdeburg 2007* ([www.ikg.uni-hanover.de/fileadmin/ikg/staff/publications/Konferenzbeitraege\\_abstract\\_review/PaelkeBrenner\\_simvis2007.pdf](http://www.ikg.uni-hanover.de/fileadmin/ikg/staff/publications/Konferenzbeitraege_abstract_review/PaelkeBrenner_simvis2007.pdf))